

--	--	--	--	--	--

परीक्षार्थी अपना अनुक्रमांक यहाँ लिखें

Candidate should write his/her Roll No. here

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 15

No. of Printed Pages : 15

कुल प्रश्नों की संख्या : 5

Total No. of Questions : 5

M0712012

गणित

MATHEMATICS

प्रथम प्रश्न-पत्र

First Paper

समय : 3 घंटे]

Time : 3 Hours]

[पूर्णांक : 300

[Total Marks : 300

परीक्षार्थियों के लिये निर्देश :

Instructions to the candidates :

1. इस प्रश्न-पत्र में कुल पाँच प्रश्न हैं । सभी प्रश्नों के उत्तर देने हैं । प्रश्न क्र. 2 से 5 तक में आंतरिक विकल्प हैं ।

This question paper consists of *five* questions. *All* the questions have to be answered. Question Nos. 2 to 5 have an internal choice.

2. प्रश्न-पत्र के कुल अंक 300 हैं तथा निर्धारित समय 3 घंटे है । यदि अन्यथा नहीं दर्शाया गया है, तो सभी प्रश्नों के अंक समान हैं । प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका चयन आपने अपने आवेदन-पत्र में किया है । किसी अन्य माध्यम में लिखे गये उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेगा । सभी पाँच प्रश्न करना अनिवार्य है । प्रश्न-पत्र के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर क्रमानुसार दें, एक ही प्रश्न के विभिन्न भागों के उत्तर अनिवार्य रूप से एक साथ ही लिखे जायें तथा उनके बीच अन्य प्रश्नों के उत्तर न लिखे जायें । परीक्षा में सामान्य कैलकुलेटर ही उपयोग में लिया जा सकता है, साइंटिफिक नहीं ।

The total number of marks of the question paper is **300** and the time allotted is **3** hours. *All* questions carry equal marks, unless specifically stated otherwise. Answers should be written in the medium which you have chosen in your Application Form. No marks will be awarded, if the answer is written in any other medium. All the *five* questions must be answered. Questions should be answered exactly in order in which they appear in the question paper. Answers to the various parts of the same question should be written together compulsorily and no answers of other questions should be inserted between them. Regular calculator alone can be used in exam., not the Scientific one.

3. प्रथम प्रश्न लघु उत्तरीय होगा जिसमें 20 अनिवार्य प्रश्न होंगे । प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक अथवा दो पंक्तियों में देना होगा ।

The first question will be of short answer type consisting of **20** compulsory questions, each one is to be answered in *one* or *two* lines.

4. जहाँ शब्द सीमा दी गई है उसका अवश्य पालन करें ।

Wherever word limit has been given, it must be adhered to.

5. यदि किसी प्रश्न में किसी प्रकार की कोई मुद्रण या तथ्यात्मक प्रकार की त्रुटि हो, तो प्रश्न के हिन्दी तथा अंग्रेजी रूपांतर में से अंग्रेजी रूपांतर मानक माना जायेगा ।

In case there is any error of printing or factual nature, then out of the Hindi and English versions of the question, the English version will be treated as standard.

1. निम्नलिखित लघु उत्तरीय प्रश्नों में से प्रत्येक का उत्तर 1 या 2 पंक्तियों में दीजिए : $20 \times 3 = 60$

Answer the following short answer type questions in 1 or 2 lines each :

- (A) समूह G के किसी अवयव a की कोटि को परिभाषित कीजिए ।

Define the order of any element a of group G .

- (B) क्रमचय :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 7 & 4 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

की कोटि ज्ञात कीजिए।

Find the order of the permutation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 7 & 4 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

- (C) बिन्दु $(1, -2, 1)$ पर $\text{grad } \phi$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $\phi = 3x^2y - y^3z^2$ है ।

Find the value of $\text{grad } \phi$ at point $(1, -2, 1)$, where $\phi = 3x^2y - y^3z^2$.

- (D) वक्र $x^2y^2 + xy + x + y = 0$ की अक्षों के समांतर अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए ।

Find the asymptotes parallel to axes for the curve :

$$x^2y^2 + xy + x + y = 0.$$

- (E) अवकल समीकरण $(1 + y^2)dx = (\tan^{-1}y - x)dy$ का समाकलन गुणक लिखिए ।

Write the integrating factor of the differential equation $(1 + y^2)dx = (\tan^{-1}y - x)dy$.

(F) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx.$$

Evaluate :

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx.$$

(G) सरल रेखा $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ एवं समतल $ax + by + cz + d = 0$ के

परस्पर समांतर एवं लंबवत् होने के प्रतिबंध लिखिए ।

Write the conditions for a line $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ and plane

$ax + by + cz + d = 0$ are mutually parallel and perpendicular.

(H) बिंदुओं $(0, 0, 0)$, $(0, 1, -1)$, $(-1, 2, 0)$ तथा $(1, 2, 3)$ से होकर जाने वाले गोले

का समीकरण लिखिए ।

Write the equation of the sphere passing through the points $(0, 0, 0)$,

$(0, 1, -1)$, $(-1, 2, 0)$ and $(1, 2, 3)$.

- (I) यदि S कोई संवृत सतह है जो आयतन V घेरती है तथा $\vec{F} = xi + 2yj + 3zk$ है तब $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ का मान लिखिए ।

If S is any closed surface which enclosed a volume V and $\vec{F} = xi + 2yj + 3zk$, then write the value of $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$.

- (J) यदि एक न्याय सिक्के को 100 बार उछला जाये, तो प्रसरण का मान ज्ञात कीजिए ।

If a fair coin is tossed hundred times, then find the variance.

- (K) सिद्ध कीजिए कि :

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}.$$

Prove that :

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}.$$

- (L) यदि A और B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ तथा $P(A \cup B) = \frac{11}{12}$, तब $P(A \cap B)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

If A and B are two events such that $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ and

$P(A \cup B) = \frac{11}{12}$, then find the value of $P(A \cap B)$.

(M) यदि $x^2y_2 + xy_1 + x = 0$, तब सिद्ध कीजिए कि :

$$x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0.$$

If $x^2y_2 + xy_1 + x = 0$, then prove that :

$$x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0.$$

(N) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^1 \frac{x \tan^{-1} x}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$$

Evaluate :

$$\int_0^1 \frac{x \tan^{-1} x}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$$

(O) सिद्ध कीजिए कि \mathbf{R}^2 में सदिशों का समुच्चय $\{(1, 1), (1, 0)\}$, \mathbf{R}^2 का आधार बनाता है ।

Prove that the set of vectors $\{(1, 1), (1, 0)\}$ in \mathbf{R}^2 forms a basis for \mathbf{R}^2 .

(P) अवकल समीकरण :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \sin 2x.$$

का विशेष समाकलन ज्ञात कीजिए।

Find the particular integral of the differential equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \sin 2x.$$

(Q) एक चर के फलनों के लिये टेलर श्रेणी लिखिए ।

Write Taylor's series for functions of one variable.

(R) घटना, प्रतिदर्श समष्टि तथा किसी घटना की प्रायिकता को परिभाषित कीजिए ।

Define event, sample space and probability of an event.

(S) यदि N किसी समूह G का प्रसामान्य उपसमूह है तथा G आबेली है, तो सिद्ध कीजिए कि विभाग समूह $\frac{G}{N}$ भी आबेली होगा ।

If N is a normal subgroup of a group G and G is abelian, then prove that the quotient group $\frac{G}{N}$ is also an abelian.

(T) रैखिक रूपांतरण $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ जो निम्नानुसार परिभाषित है :

$$T(a, b) = (a + b, a - b, b) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

तब विमा $[R(T)]$ ज्ञात कीजिए ।

Find $\dim [R(T)]$ for a linear transformation $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ defined as below :

$$T(a, b) = (a + b, a - b, b) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

2. (a) सिद्ध कीजिए कि वलयों के समुच्चय में सम्बन्ध 'तुल्यकारी है' एक तुल्यता सम्बन्ध होता है । 30×2=60

Prove that the relation 'is isomorphic to' is an equivalence relation in the set of rings.

अथवा

(Or)

दर्शाइए कि फलन $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $x = 1$ के अतिरिक्त x के सभी मानों के लिए संतत है। इसे $x = 1$ पर संतत होने के लिये पुनः परिभाषित कीजिए ।

Show that, the function $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ is continuous for all values of x except at $x = 1$. Redefine this to be continuous at $x = 1$.

(b) आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

का विकर्णीकरण कीजिए ।

Diagonalize the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

अथवा

(Or)

अवकल समीकरण :

$$p^2(1 - x^2) = (1 - y^2)$$

का पूर्वग एवं विचित्र हल ज्ञात कीजिए ।

Obtain the primitive and singular solution of the differential equation :

$$p^2(1 - x^2) = (1 - y^2).$$

3. (a) समतल में ग्रीन का प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए ।

30×2=60

State and prove Green's theorem in the plane.

अथवा

(Or)

बहुलक की परिभाषा दीजिए एवं इसके 5-5 गुण एवं दोष लिखिए । अधोलिखित आंकड़ों

के लिए बहुलक की गणना कीजिए :

अंक	बारम्बारता
10	8
15	12
20	36
25	25
30	28
35	18
40	9

Define mode and write 5-5 merits and demerits. Calculate mode for the following data :

Marks	Frequency
10	8
15	12
20	36
25	25
30	28
35	18
40	9

(b) यदि $I_n = \int \tan^n x dx$, तब सिद्ध कीजिए कि :

$$I_n = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} \quad (n > 1; n \in \mathbb{N})$$

एवं इस प्रकार $\int_0^{\pi/4} \tan^6 x dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

If $I_n = \int \tan^n x \, dx$, then prove that :

$$I_n = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} \quad (n > 1; n \in \mathbb{N})$$

and hence evaluate :

$$\int_0^{\pi/4} \tan^6 x \, dx.$$

अथवा

(Or)

दशाइये कि समतल $lx + my + nz = p$, परवलयज $ax^2 + by^2 = 2z$ के बिन्दु (α, β, γ) पर स्पर्श करेगा यदि :

$$\frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} = -2np.$$

Show that the plane $lx + my + nz = p$ will touch the paraboloid $ax^2 + by^2 = 2z$ at a point (α, β, γ) if :

$$\frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} = -2np.$$

4. (a) जाति एवं शून्यता प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए ।

30×2=60

State and prove Rank and Nulity theorem.

अथवा

(Or)

समूह समाकारिता के मूलभूत प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए ।

State and prove fundamental theorem of group homomorphism.

- (b) $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ समाकलन क्षेत्र बेलन $z = 0, z = 1,$
 $x^2 + y^2 = 4$ का पृष्ठ है ।

Evaluate :

$$\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$$

where region of integration is the surface of cylinder $z = 0, z = 1,$
 $x^2 + y^2 = 4.$

अथवा

(Or)

लेम्निस्केट $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ का परिमाण ज्ञात कीजिए।

Find the perimeter of the lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\theta.$

5. किन्हीं चार भागों को हल कीजिए :

15×4=60

Attempt any *four* parts :

(A) अमूर्त बीजगणित में अद्वितीय गुणनखंड प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए ।

State and prove unique factorization theorem in Abstract Algebra.

(B) अवकल समीकरण $(D^2 - 4D + 4)y = e^{2x} \sin 2x$ को हल कीजिए ।

Solve the differential equation :

$$(D^2 - 4D + 4)y = e^{2x} \sin 2x.$$

(C) सिद्ध कीजिए कि :

$$\begin{aligned} \text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} \\ &\quad + \vec{b} \times \text{curl } \vec{a} + \vec{a} \times \text{curl } \vec{b} \end{aligned}$$

Prove that :

$$\begin{aligned} \text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} \\ &\quad + \vec{b} \times \text{curl } \vec{a} + \vec{a} \times \text{curl } \vec{b} \end{aligned}$$

- (D) उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अक्ष $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{1}$ एवं त्रिज्या 2 है ।

Find the equation of the right circular cylinder whose axis is $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{1}$ and radius is 2.

- (E) बेज प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Bayes' theorem.

- (F) दो फलनों के गुणनफल के n -अवकलन हेतु लाइबनिट्ज प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए ।

State and prove Leibnitz's theorem for n -differentiation of product of two functions.

अनुक्रमांक / Roll No.

--	--	--	--	--	--

परीक्षार्थी अपना अनुक्रमांक यहाँ लिखें

Candidate should write his/her Roll No. here

कुल प्रश्नों की संख्या : 5

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 18

Total No. of Questions : 5

No. of Printed Pages : 18

M0722012

गणित

MATHEMATICS

द्वितीय प्रश्न-पत्र

Second Paper

समय : 3 घंटे]

[पूर्णांक : 300

Time : 3 Hours]

[Total Marks : 300

परीक्षार्थियों के लिये निर्देश :

Instructions to the candidates :

1. इस प्रश्न-पत्र में कुल पाँच प्रश्न हैं । सभी प्रश्नों के उत्तर देने हैं । प्रश्न क्र. 2 से 5 तक में आंतरिक विकल्प हैं ।

This question paper consists of *five* questions. *All* the questions have to be answered. Question Nos. **2** to **5** have an internal choice.

2. प्रश्न-पत्र के कुल अंक 300 हैं तथा निर्धारित समय 3 घंटे है । यदि अन्यथा नहीं दर्शाया गया है, तो सभी प्रश्नों के अंक समान हैं । प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका चयन आपने अपने आवेदन-पत्र में किया है । किसी अन्य माध्यम में लिखे गये उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेगा । सभी पाँच प्रश्न करना अनिवार्य है । प्रश्न-पत्र के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर क्रमानुसार दें, एक ही प्रश्न के विभिन्न भागों के उत्तर अनिवार्य रूप से एक साथ ही लिखे जायें तथा उनके बीच अन्य प्रश्नों के उत्तर न लिखे जायें । परीक्षा में सामान्य कैलकुलेटर ही उपयोग में लिया जा सकता है, साइंटिफिक नहीं ।

The total number of marks of the question paper is **300** and the time allotted is **3** hours. *All* questions carry equal marks, unless specifically stated otherwise. Answers should be written in the medium which you have chosen in your Application Form. No marks will be awarded, if the answer is written in any other medium. All the *five* questions must be answered. Questions should be answered exactly in order in which they appear in the question paper. Answers to the various parts of the same question should be written together compulsorily and no answers of other questions should be inserted between them. Regular calculator alone can be used in exam, not the Scientific one.

3. प्रथम प्रश्न लघु उत्तरीय होगा जिसमें 20 अनिवार्य प्रश्न होंगे । प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक अथवा दो पंक्तियों में देना होगा ।

The first question will be of short answer type consisting of **20** compulsory questions, each one is to be answered in *one* or *two* lines.

4. जहाँ शब्द सीमा दी गई है उसका अवश्य पालन करें ।

Wherever word limit has been given, it must be adhered to.

5. यदि किसी प्रश्न में किसी प्रकार की कोई मुद्रण या तथ्यात्मक प्रकार की त्रुटि हो, तो प्रश्न के हिन्दी तथा अंग्रेजी रूपांतर में से अंग्रेजी रूपांतर मानक माना जायेगा ।

In case there is any error of printing or factual nature, then out of the Hindi and English versions of the question, the English version will be treated as standard.

1. निम्नलिखित सभी लघु उत्तरीय प्रश्नों को हल कीजिए :

20×3=60

Attempt *all* short answer type questions :

(A) मूल बिन्दु पर सांतत्य की जाँच कीजिए, यदि :

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^5 / (x^4 + y^{10}) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Test the continuity at the origin, if :

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^5 / (x^4 + y^{10}) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(B) एक त्रिभुज ABC की दो भुजाएँ a , b और उनके मध्यस्थ कोण C की नापें की गयीं । सिद्ध कीजिए कि तीसरी भुजा c की आगणित लम्बाई में त्रुटि δ_c , कोण C में सूक्ष्म त्रुटि δ_C के सापेक्ष, निम्नवत् है :

$$\delta_c = \delta_C (a \sin B).$$

Two sides a , b of a triangle ABC and their included angle C are measured.

Prove that the error δ_c in the computed length of the third side c , in

relation to small error δ_C in the angle C is given as below :

$$\delta_c = \delta_C (a \sin B).$$

(C) मूल्यांकन कीजिए :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^n}{e^{ax}} \right).$$

Evaluate :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^n}{e^{ax}} \right).$$

(D) कार्तीय सूत्र :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

को ध्रुवीय सूत्र में रूपांतरित कीजिए ।

Transform the Cartesian formula :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

into polar form.

(E) यदि $u = \log(x^2 + y^2)$, तो प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए ।

If $u = \log(x^2 + y^2)$, then find the first order partial derivatives.

(F) सिद्ध कीजिए कि :

$$e^x(\cos y + i \sin y)$$

एक विश्लेषिक फलन है । इसका अवकलज भी ज्ञात कीजिए ।

Prove that :

$$e^x(\cos y + i \sin y)$$

is an analytic function. Find its derivative also.

(G) कॉशी समाकलन सूत्र की सहायता से फलन :

$$f(z) = \int_C \frac{e^{2z}}{(z-1)(z-2)} dz$$

का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ C एक वृत्त है और $|z| = 3$ ।

Using Cauchy's Integral Formula, find the value of the function :

$$f(z) = \int_C \frac{e^{2z}}{(z-1)(z-2)} dz,$$

where C is a circle and $|z| = 3$.

(H) यदि $0 < |z| < 1$, तो फलन :

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

को श्रेणी में प्रसारित कीजिए ।

If $0 < |z| < 1$, then expand the function :

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

in series.

(I) दिये गये कथन :

$$(1 + a) \cdot (b + 0) = b$$

का द्वैत लिखिए ।

Write the dual of the given statement :

$$(1 + a) \cdot (b + 0) = b.$$

(J) यदि

$$z = x^3 + y^3 - 3axy,$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

If

$$z = x^3 + y^3 - 3axy,$$

then prove that :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

(K) रैखिक प्रक्रम से आप क्या समझते हैं ?

What do you mean by linear programming ?

(L) यदि एक कण एकसमान चाल से एक परवलय निर्मित करता है, तो सुनिश्चित कीजिए कि इसका कोणीय वेग नाभि S के परितः, किसी बिन्दु P पर $(SP)^{3/2}$ का व्युत्क्रमानुपाती होता है ।

If a particle describes a parabola with a uniform speed, then confirm that its angular velocity about the focus S, at any point P, varies inversely as $(SP)^{3/2}$.

(M) यदि किसी गतिमान कण की त्रिज्या और अनुप्रस्थ वेग सदैव परस्पर समानुपाती हों, तो दर्शाइये कि पथ एक समकोणिक सर्पिल है ।

If the radial and transverse velocities of a moving particle are always proportional to each other, then show that the path is an equiangular spiral.

(N) फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{जब } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{जब } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

के लिये $f_x(0, 0)$ तथा $f_y(0, 0)$ के मान ज्ञात कीजिए ।

Find the value of $f_x(0, 0)$ and $f_y(0, 0)$ for a function :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{when } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{when } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(O) बूलीय बीजगणित B में, दर्शाइये कि :

$$ab + ab' + a'b + a'b' = 1,$$

जहाँ $\forall a, b \in B$ ।

In Boolean Algebra B, show that :

$$ab + ab' + a'b + a'b' = 1,$$

where $\forall a, b \in B$.

(P) निम्न को परिभाषित कीजिए :

ग्राफ, शीर्ष की कोटि एवं समानान्तर भुजा (किनारा) ।

Define the following :

Graph, degree of vertex and parallel edge.

(Q) न्यूटन-राफ़सन विधि द्वारा 2 का घनमूल दशमलव के पाँच अंकों तक शुद्धतम रूप में ज्ञात कीजिए ।

Find the cube root of 2 approximately by Newton-Raphson's method correct to five decimal places.

(R) सिम्पसन के 1/3 नियम द्वारा :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

का मान ज्ञात कीजिए ।

Using Simpson's one-third rule, evaluate :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

- (S) किसी दूरीक समष्टि में एक बिन्दु के सामीप्य (neighbourhood) की परिभाषा दीजिए ।

Define neighbourhood of an element in a metric space.

- (T) समीकरण :

$$p^2 + q^2 = x + y$$

का पूर्ण समाकलन ज्ञात कीजिए ।

Find the complete integral of the equation :

$$p^2 + q^2 = x + y.$$

2. (A) यदि σ किसी अन्तराल $[a, b]$ का एक सूक्ष्म विभाजक हो, तो दर्शाइये किं फलन : f अन्तराल $[a, b]$ पर रीमान समाकलनीय होगा यदि और केवल यदि किसी $\epsilon > 0$ के लिये :

2×30=60

$$U(\sigma, f) - L(\sigma, f) < \epsilon.$$

If σ be a small partition of any interval $[a, b]$, then show that the function : f will be Riemann Integrable on $[a, b]$ if and only if for any $\epsilon > 0$:

$$U(\sigma, f) - L(\sigma, f) < \epsilon.$$

अथवा

(Or)

गॉस-जोर्डन विधि द्वारा, समीकरण निकाय :

$$2x - 6y + 8z = 24$$

$$5x + 4y - 3z = 2$$

$$3x + y + 2z = 16.$$

को हल कीजिए ।

Using Guass-Jordan Method, solve the system of equations :

$$2x - 6y + 8z = 24$$

$$5x + 4y - 3z = 2$$

$$3x + y + 2z = 16.$$

(B) निम्न आंशिक अवकल समीकरण :

$$(y + z)p + (z + x)q = x + y$$

को हल कीजिए ।

Solve the following Partial Differential Equation :

$$(y + z)p + (z + x)q = x + y.$$

अथवा

(Or)

विश्लेषिक फलन का काल्पनिक भाग ज्ञात कीजिए जिसका वास्तविक भाग नीचे दिया है :

$$x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2.$$

Find the imaginary part of the analytic function whose real part is given below :

$$x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2.$$

3. (A) रैगुला-फ़ाल्सी विधि द्वारा समीकरण : 2×30=60

$$x^3 - 9x + 1 = 0$$

का वास्तविक मूल ज्ञात कीजिए ।

Find the real root of the equation :

$$x^3 - 9x + 1 = 0$$

by Regula-Falsi Method.

अथवा

(Or)

यदि एक कण एकसमान कोणीय वेग से किसी परवलय : $p^2 = ar$ में उसकी नाभि के परितः गतिमान हो, तो सिद्ध कीजिए कि किसी बिन्दु पर इसका अभिलाम्बिक त्वरण उस बिन्दु पर इसके पथ की वक्रता-त्रिज्या का समानुपाती होता है ।

If a particle is moving in any parabola : $p^2 = ar$ with uniform angular velocity about its focus, then prove that its normal acceleration at any point is proportional to the radius of curvature of its path at that point.

(B) परिरेखा (कण्टूर) समाकलन विधि द्वारा सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{(a^2 - b^2)}},$$

जहाँ $a^2 > b^2$ ।

Using the Method of Contour Integration, prove that :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{(a^2 - b^2)}},$$

where $a^2 > b^2$.

अथवा

(Or)

समतलीय बलों (जो साम्यावस्था में नहीं हैं) के एक निकाय के समतल में तीन समरेख बिन्दुओं : A, B, C के सापेक्ष आघूर्ण क्रमशः G_1, G_2, G_3 हैं । सिद्ध कीजिए कि :

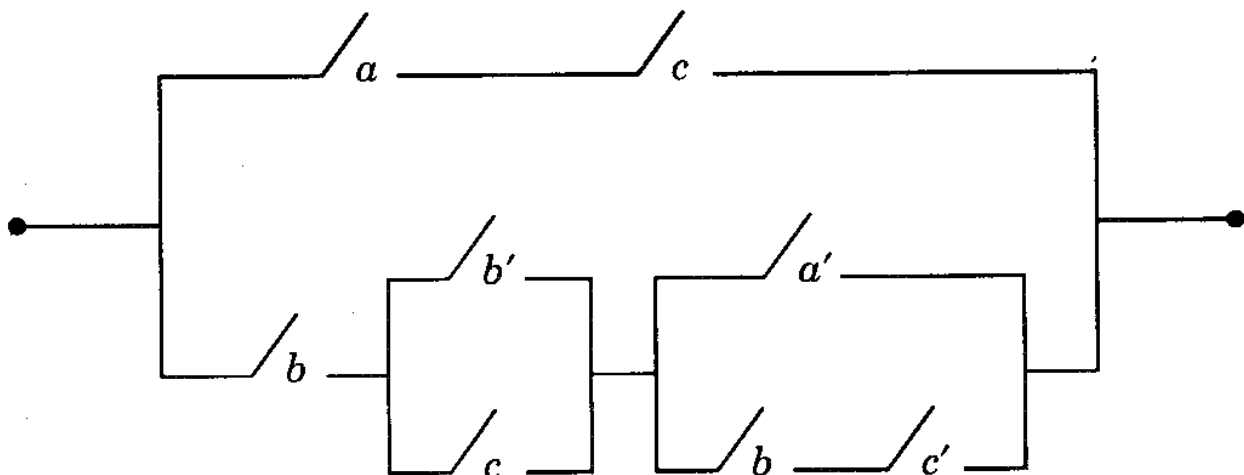
$$G_1 \cdot BC + G_2 \cdot CA + G_3 \cdot AB = 0.$$

The moments of a system of coplanar forces (not in equilibrium) about three collinear points : A, B, C in the plane are respectively G_1, G_2, G_3 . Prove that :

$$G_1 \cdot BC + G_2 \cdot CA + G_3 \cdot AB = 0.$$

4. निम्न स्विचन परिपथ को सरलीकृत स्विचन परिपथ से प्रतिस्थापित कीजिए तथा प्राप्त सरलीकृत फलन का पूर्ण संयोजनीय एवं वियोजनीय प्रसामान्य रूप भी ज्ञात कीजिए । 60

Replace the following switching circuit with simplified switching circuit. Also find the complete conjunctive and disjunctive normal form of obtained simplified function.



अथवा

(Or)

एक बिक्रीकर्ता चार नगरों : 1, 2, 3 एवं 4 का भ्रमण करना चाहता है । सभी नगरों का भ्रमण पूरा करने के पहले वह किसी भी नगर में दुबारा जाना नहीं चाहता और वापसी अपने शुरूआती गृह नगर में ही करना चाहता है । यदि एक नगर से दूसरे नगर जाने में व्यय का ब्यौरा (रुपयों में) निम्न सारणी में दिया गया है, तो उसके न्यूनतम खर्चीले मार्ग का पता कीजिए :

नगर को

1 2 3 4

नगर से

1	0	30	80	50
2	40	0	140	30
3	40	50	0	20
4	70	80	130	0

A salesman wants to visit four cities : 1, 2, 3 and 4. He does not want to visit any city twice before completing the tour of all the cities and wishes to return to his home city, the starting station. If the cost details of going from one city to another (in rupees) are given in the table below, then find his least cost route :

		To city			
		1	2	3	4
From city	1	0	30	80	50
	2	40	0	140	30
	3	40	50	0	20
	4	70	80	130	0

5. किन्हीं चार भागों को हल कीजिए :

4×15=60

Solve any *four* parts :

(A) समाकलन गणित की मूलभूत प्रमेय को लिखिये और सिद्ध कीजिए ।

Write and prove the Fundamental Theorem of integral calculus.

(B) सिम्पलैक्स विधि द्वारा, निम्न रैखिक प्रक्रम समस्या के लिए प्रारंभिक आधारभूत संभावित हल ज्ञात कीजिए :

अल्पीकरण : $Z = x_1 - 3x_2 + 3x_3$

प्रतिबंधों के तहत : $3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7,$

$$2x_1 + 4x_2 \geq -12,$$

$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Find the initial basic feasible solution (i.b.f.s.) for the following Linear Programming Problem (L.P.P.) using the Simplex Method :

Minimize : $Z = x_1 - 3x_2 + 3x_3$

Subject to : $3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7,$

$$2x_1 + 4x_2 \geq -12,$$

$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

- (C) ग्राफ़ के सेतु-समस्या एवं उपयोगिता-समस्या में उपयोगों का उल्लेख कीजिए ।

Explain the applications of graph in bridge-problem and utility-problem.

- (D) दो चरों के समघातीय फलन के लिये ऑयलर प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए ।

State and prove Euler's theorem for homogeneous functions of two variables.

- (E) फलन

$$u = x^3y^2(1 - x - y)$$

के उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए ।

Find the maximum/minimum value of function :

$$u = x^3y^2(1 - x - y)$$

- (F) निम्न समीकरण को चार्पिट विधि द्वारा हल कीजिए :

$$q = (z + px)^2.$$

Solve the following equation by Charpit Method :

$$q = (z + px)^2.$$